

Amortissement de vibrations de poutres par effet Trou Noir : caractérisation expérimentale et modèles numériques

Vivien Denis, Adrien Pelat et François Gautier

Laboratoire d'acoustique de l'université du Maine (LAUM)
UMR CNRS 6613,
Avenue Olivier Messiaen
72000 Le Mans CEDEX 9
France
E-mail : vivien.denis@univ-lemans.fr

Cyril Touzé

IMSIA
ENSTA ParisTech, CNRS
CEA/EDF, Université Paris-Saclay
828, boulevard des maréchaux
91762 Palaiseau CEDEX
France

Résumé

L'effet Trou Noir Acoustique (TN) est une technique passive d'amortissement de vibrations sans ajout de masse fondée sur les propriétés des ondes de flexion dans des structures minces d'épaisseur variable. La mise en œuvre habituelle consiste en une plaque avec une extrémité profilée selon une loi exponentielle, recouverte d'un film viscoélastique. L'inhomogénéité de la structure conduit à une baisse de la célérité et une augmentation de l'amplitude des ondes de flexion, ce qui a pour conséquence une dissipation d'énergie efficace quand un film amortissant est placé dans la zone de faible épaisseur. Lorsqu'un tel profil est placé à l'extrémité d'une poutre, des caractérisations expérimentales sont possibles à l'aide du coefficient de réflexion ou du recouvrement modal. Des modèles numériques d'une telle structure existent et peuvent aider à comprendre le rôle de la variation d'épaisseur, les effets d'imperfections de fabrication ou encore les effets non-linéaires dus aux faibles épaisseurs.



amortissement des vibrations est un enjeu important dans de nombreuses applications industrielles. Les méthodes classiques utilisées pour réduire ces vibrations consistent par exemple à couvrir la structure avec des matériaux viscoélastiques lourds. L'efficacité de ces méthodes est démontrée mais elles donnent lieu à un ajout de masse important qui peut être rédhibitoire dans l'industrie des transports par exemple. Le développement de méthodes d'amortissement de vibration sans ajout de masse devient alors nécessaire. Une de ces méthodes consiste à tirer parti de l'effet "Trou Noir Acoustique" (TN) [1]. Tel que décrit par Mironov [3], cet effet tire parti des propriétés des ondes de flexion dans une plaque d'épaisseur variable. On peut montrer que les ondes se propageant dans un profil d'épaisseur $h(x)$:

$$h(x) = \epsilon x^m, m \geq 2, \quad (1)$$

ralentissent sans être réfléchies et que leur temps de vol dans le profil tend vers l'infini si l'épaisseur tend vers zéro. L'épaisseur résiduelle dans un profil « Trou Noir » expérimental est toutefois trop grande pour obtenir un tel effet mais cela peut être compensé par l'ajout d'un film viscoélastique mince [1]. Le coefficient de réflexion de l'extrémité est alors considérablement réduit. D'autres travaux théoriques proposent un modèle plus raffiné pour le coefficient de réflexion [3] et mettent en évidence une augmentation du recouvrement modal [4]. Des mises en évidence expérimentales de l'effet sont également nombreuses [5,6].

Cet article propose une synthèse sur l'effet TN appliqué sur des poutres, dans un cadre académique. La section suivante montre quelques moyens de caractérisation expérimentale. La troisième section explique le rôle des variations d'épaisseur à l'aide d'un modèle numérique.

Un second modèle en quatrième section permet d'étudier l'effet de défauts d'extrémité. L'effet des non-linéarités est présenté en cinquième section. La sixième section propose une conclusion générale.

Caractérisation expérimentale du Trou Noir

On s'intéresse ici à une poutre en aluminium de dimensions $1000 \times 20 \times 1,5$ mm munie d'un TN de longueur 6 cm et d'épaisseur terminale $50 \mu\text{m}$ recouvert d'un film viscoélastique que l'on compare à une poutre uniforme de même dimensions. Comparons tout d'abord le gain mesuré que l'on peut attendre d'une terminaison TN par rapport à une poutre de section uniforme. La comparaison se fait sur la mobilité *i.e.* le rapport vitesse sur force mesuré en un point choisi arbitrairement sur chaque poutre. La figure 1 montre qu'en moyenne et haute fréquences, les pics de la poutre TN sont extrêmement lissés par rapport à la poutre uniforme ce qui démontre l'efficacité du dispositif à amortir au-delà de 500 Hz. Par contre, on remarque que l'effet en basse fréquence est moins notable.

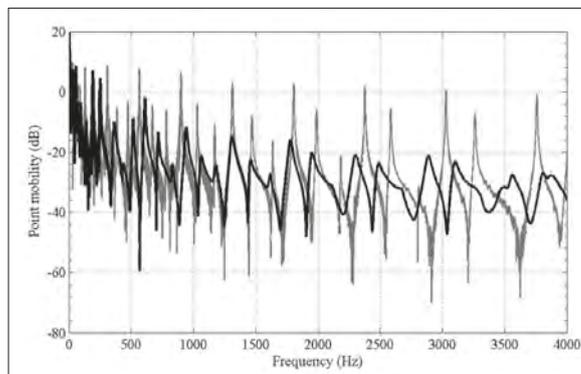


Fig. 1 : Mobilités de poutres uniforme (gris) et Trou Noir (noir)

Coefficient de réflexion

La diminution du caractère résonnant de la poutre peut être quantifiée précisément par la mesure du coefficient de réflexion de l'extrémité TN. Le champ de déplacement dans la région d'épaisseur uniforme de la poutre et loin des sources et des bords, peut, en régime harmonique, être décrit comme la superposition de deux ondes :

$$w(x) = Ae^{-j\omega x} + Be^{j\omega x} \quad (2)$$

Le coefficient de réflexion en champ lointain est alors défini comme le rapport :

$$R = A/B \quad (3)$$

La mesure de déplacement en différents points de la poutre permet par une méthode aux moindres carrés de remonter aux coefficients des ondes et donc au coefficient de réflexion de l'extrémité TN. Celui-ci est tracé sur la figure 2 aux côtés du coefficient de réflexion d'une extrémité libre de poutre uniforme. On constate que ce coefficient de réflexion diminue de manière importante avec la fréquence et atteint environ 0,1 à partir de 6 kHz. La phase du coefficient de réflexion se déroule plus vite ce qui indique qu'une onde passe plus de temps dans la région d'épaisseur décroissante que dans une même longueur d'épaisseur constante.

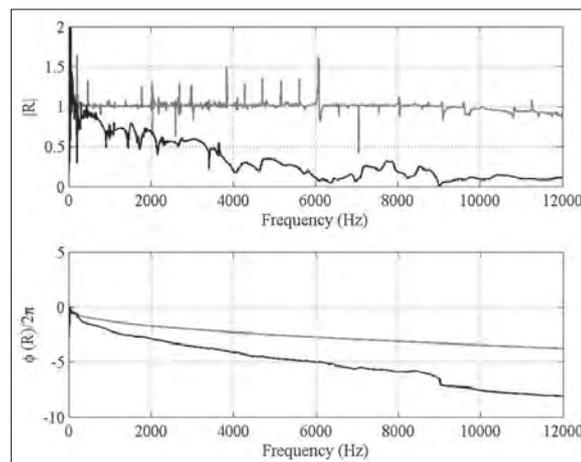


Fig. 2 : Module et phase du coefficient de réflexion des poutres uniforme (gris) et TN (noir)

Recouvrement modal

La mesure de la réponse impulsionnelle permet, via une méthode d'analyse modale ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique* [8,9]) d'obtenir les valeurs propres complexes de la poutre. Les facteurs de perte modaux et le facteur de recouvrement modal (défini comme le rapport de la bande passante à -3 dB et l'espacement intermodal) sont extraits et tracés sur la figure 3. Ces deux facteurs sont fortement affectés par l'ajout du TN sur la poutre ; le recouvrement modal est très élevé (jusqu'à 50%) et traduit bien le lissage de la réponse en fréquence visible sur la figure 1.

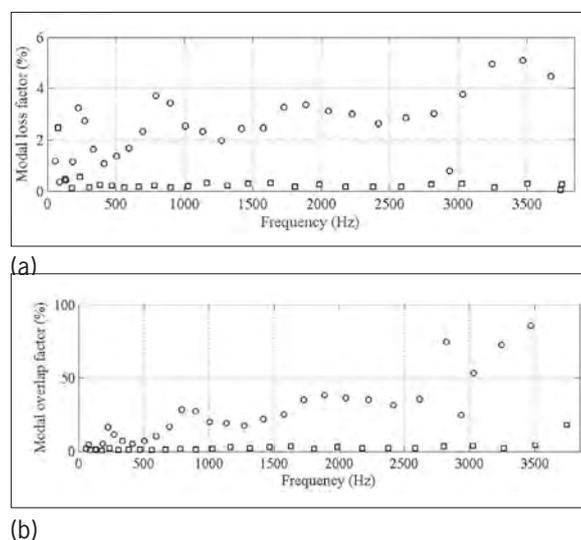


Fig. 3 : (a) Facteurs de perte modaux et (b) facteur de recouvrement modal des poutres uniforme (carré) et TN (cercle)

Rôle de la variation de rigidité

Modèle numérique de TN

Un modèle permet d'analyser plus finement les effets de la variation de rigidité dans la poutre TN. La géométrie de la plaque modélisée est décrite sur la figure 4. L'épaisseur dans la zone TN est décrite par :

$$h(x) = \frac{(x+x_0)^m}{(x_{ABH} + x_0)^m}, \quad (4)$$

On modélise la poutre TN comme une plaque de Kirchoff-Love d'épaisseur variable, l'hypothèse de plaque se justifiant à cause de longueur d'onde dans la région d'épaisseur faible, qui est du même ordre de grandeur que la largeur. L'équation du mouvement pour le déplacement transverse $w(x,y)$ en régime harmonique de pulsation ω et en l'absence d'excitation extérieure s'écrit alors [10] :

$$\nabla^2(D(x)\nabla^2w(x,y)) - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2D(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2w(x,y)}{\partial y^2}\right) - \rho(x)h(x)\omega^2w(x,y) = 0, \quad (5)$$

où E est le module d'Young, $\rho(x)$ la masse volumique, ν le coefficient de Poisson, $h(x)$ l'épaisseur et $D(x) = E(1+\eta(x)h(x)^3/12(1-\nu^2))$ la rigidité en flexion, avec $\nu(x)$ le facteur de perte dû au film viscoélastique, donné par la loi de Ross [11]. Le problème (5) est complété par des conditions de bord libre.

La recherche des solutions propres du problème (5) est compliquée par la prise en compte de l'épaisseur variable et demande une approche numérique spécifique. Les solutions sont obtenues par une méthode aux différences finies. L'utilisation d'un maillage uniforme pour une structure où l'épaisseur et donc la longueur d'onde varient spatialement peut donner lieu à un coût de calcul important. Pour remédier à cela, le maillage de la méthode est adapté à la variation de longueur d'onde des ondes de flexion.

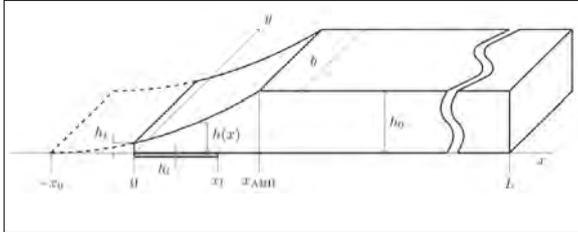


Fig. 4 : Schéma de la plaque TN modélisée

Résultats

La résolution numérique du problème (5) permet d'obtenir le spectre de valeurs propres tracé dans le plan complexe sur la figure 5, pour une poutre en aluminium de dimensions $1000 \times 20 \times 1,5$ mm munie d'un TN de longueur 6 cm (x_{ABH} sur la figure 4) et d'épaisseur terminale $50 \mu\text{m}$ recouvert d'un film viscoélastique de longueur 5 cm (x_1 sur la figure 4). L'axe imaginaire du plan traduit les fréquences propres tandis que l'axe réel représente l'amortissement. On constate que la majorité des solutions pour le TN sont organisées autour d'une droite. Les modes associés à ces valeurs propres sont des modes typiques de poutre en flexion (voir figure 6(a)). L'angle que fait la droite avec l'axe des imaginaires est plus élevé que l'angle pour une poutre uniforme. Cela est dû au fait que le facteur de perte n'est pas homogène dans la structure : il est localisé dans la région TN. Le modèle permet d'étudier des structures intermédiaires entre la poutre uniforme et la poutre TN et met en évidence le déplacement des valeurs propres vers la droite et le bas du spectre. Quelques valeurs propres se distinguent clairement des autres sur le spectre. Leur partie réelle est élevée ce qui indique un fort amortissement.

Elles sont associées à des modes de type plaque localisés dans la région TN (voir figure 6(b)).

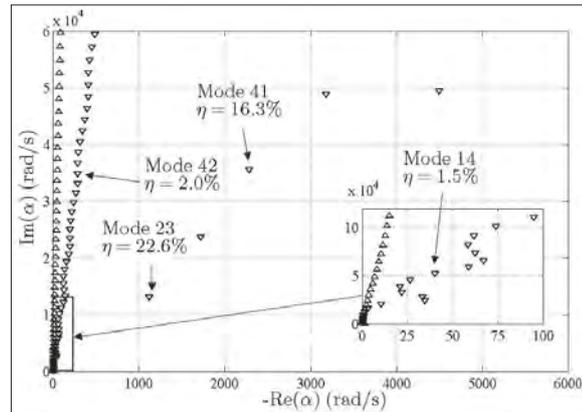
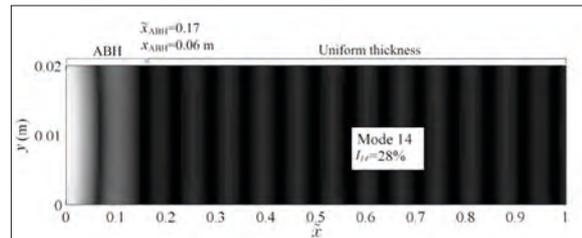
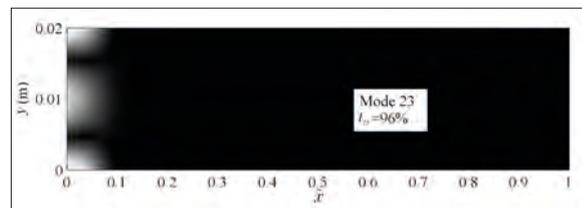


Fig. 5 : Spectre des valeurs propres α pour la poutre uniforme (Δ) et la poutre TN (∇)



(a)



(b)

Fig. 6 : Déformées modales des modes de la poutre TN (a) 14 et (b) 23. Le mode 23 est un mode localisé

Effets des imperfections

Modèle de TN imparfait

À cause des épaisseurs très faibles mises en jeu, la fabrication des profils TN donne souvent lieu à des imperfections (déchirures, etc.) et il est légitime de s'interroger sur l'effet de ces imperfections. On peut étudier ces effets dans une plaque munie d'un TN à l'aide d'un modèle de guide d'onde inhomogène multimodal [12] permettant d'étudier la propagation de chaque mode transverse dans la plaque. À ce modèle de guide s'ajoute une condition limite imparfaite, l'imperfection étant modélisée par une masse ponctuelle. Cette imperfection permet un couplage entre les modes du guide à l'extrémité. Le modèle est résolu à l'aide d'une méthode numérique dite de Magnus permettant de propager les ondes à partir de la condition limite et d'obtenir une matrice réflexion de l'extrémité TN imparfaite.

Résultats

La plaque simulée est en aluminium, d'épaisseur 1,5 mm, de largeur 0,1 m munie d'un TN de longueur 0,06 m et d'épaisseur terminale 50 μm . La figure 7 illustre l'effet sur le premier terme de la matrice réflexion d'une imperfection modélisée comme une masse centrée ($1,5 \times 10^{-5}$ kg) à l'extrémité libre. On constate dans un premier temps que le TN est inefficace en l'absence de film amortissant. L'ajout d'un défaut se traduit par l'apparition d'une série de minima localisés en fréquence, liés à des résonances locales. Ces minima évoluent avec un film amortissant vers une baisse globale du coefficient de réflexion. Cette baisse est constante et proche de 0,1. D'autres configurations de défaut montrent que son influence va toujours dans le sens d'une diminution du coefficient de réflexion, ce qui permet de conclure qu'une imperfection n'est dans ce cadre pas préjudiciable à l'effet TN.

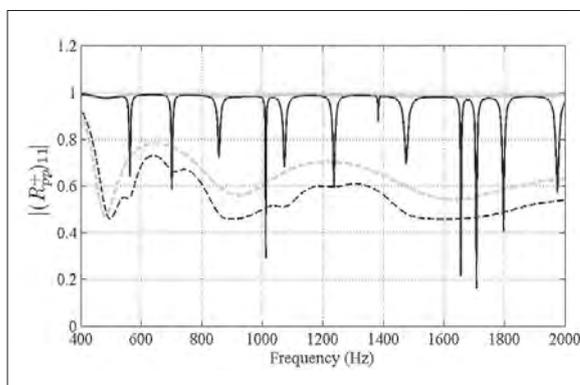


Fig. 7 : Module du terme (1,1) de la matrice réflexion de l'extrémité TN avec film (trait interrompu) et sans film (trait plein), avec défaut (gris) et sans défaut (noir)

Effets des non-linéarités géométriques

L'épaisseur minimale de l'extrémité TN nécessaire pour obtenir un amortissement conséquent est faible (quelques dizaines de microns) et les amplitudes de déplacement de l'extrémité deviennent grandes devant l'épaisseur. Un tel comportement est classiquement étudié dans un cadre non-linéaire. Cette section se propose de mettre en évidence le caractère non-linéaire d'une poutre munie d'une extrémité TN et de montrer que les non-linéarités géométriques ont une influence sur le caractère amortissant du TN.

Régimes non-linéaires

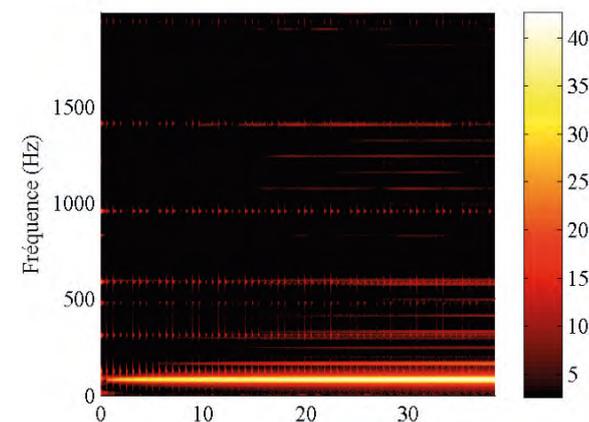
Deux poutres en aluminium sont étudiées expérimentalement : l'une est uniforme de dimensions 1,3 m \times 20 mm \times 5 mm, l'autre est de dimensions 1,5 m \times 20 mm \times 5 mm et munie d'une extrémité Trou Noir de longueur 0,3 m ; l'épaisseur de cette extrémité décroît de manière quadratique jusqu'à atteindre 50 μm environ. Un film amortissant mince est collé sur l'extrémité TN (voir figure 8).



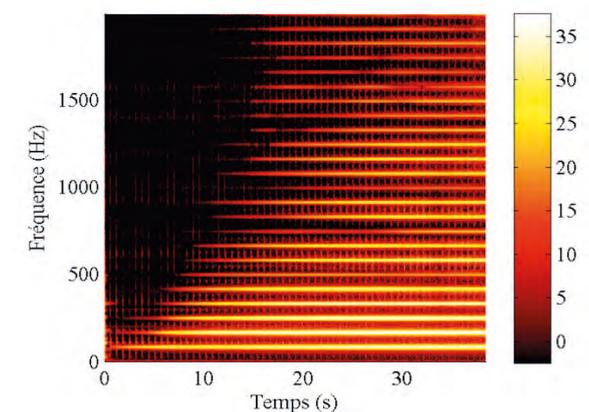
Fig. 8 : Extrémité de la poutre TN. La région d'épaisseur variable mesure 35 cm

Le montage expérimental est constitué d'un pot vibrant et d'un accéléromètre placé arbitrairement sur poutre. Le pilotage s'effectue avec une interface Labview. La poutre est excitée par un signal sinusoïdal d'amplitude linéairement croissante sur une durée de 40 s. Les résultats sont tracés sur la figure 9 sous forme de spectrogrammes pour la fréquence d'excitation $f=83$ Hz et une force d'excitation maximale de 15 N.

Le spectre de la poutre uniforme est principalement composé de la raie d'excitation à 83 Hz. Ce spectre est typique d'une structure résonnant linéairement. Le spectre de la poutre TN s'enrichit rapidement avec l'augmentation de la force d'excitation et est constitué d'un grand nombre d'harmoniques de la fréquence d'excitation. La réponse de la poutre TN est donc clairement non-linéaire. Un tel comportement suggère que de l'énergie injectée en basse fréquence, domaine où le TN est peu efficace, pourrait être transférée en haute fréquence, domaine intrinsèquement plus amorti ; cela ouvre des possibilités d'améliorer les performances du TN en basse fréquence.



(a)



(b)

Fig. 9 : Spectrogrammes d'accélération en dB (ref. 1 m.s⁻²), en réponse à une excitation de fréquence 83 Hz pour (a) la poutre uniforme et (b) la poutre TN

Modèle de TN non-linéaire

Afin de mieux étudier les effets non-linéaires dans la poutre TN, celle-ci est modélisée comme une plaque non-linéaire de von Kármán [13,14] avec épaisseur variable.

L'équation du mouvement pour le déplacement transverse $w(\mathbf{x}, t)$ s'écrit alors, en suivant les développements proposés dans [15,16] :

$$\rho h(x)\ddot{w} + \Delta(D(x)\Delta w) - (1-\nu)L(D(x), w) = p + L(w, F), \quad (6)$$

où la fonction d'Airy $F(\mathbf{x}, t)$ respecte:

$$\Delta\left(\frac{1}{Eh(x)}\Delta F\right) - (1+\nu)L\left(\frac{1}{Eh(x)}, F\right) = \frac{-1}{2}L(w, w), \quad (7)$$

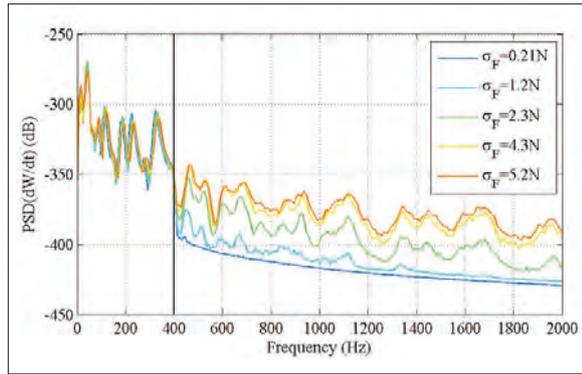
et où p est l'effort exciteur par unité de surface et $L(f, g)$ est un opérateur bilinéaire dit de Monge-Ampère:

$$L(f, g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}. \quad (8)$$

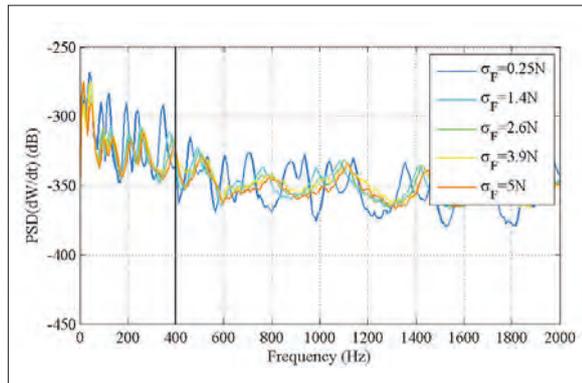
Le membre de gauche de l'équation (6) représente le comportement linéaire de la plaque en vibration de flexion. Le terme $L(w, F)$ représente les non-linéarités et permet un couplage entre mouvements de flexion et efforts dans le plan à cause des grandes déformations. Le problème (6-7) est complété par des conditions de bord libre. Le problème est résolu par une méthode modale. Dans un premier temps, on obtient la base de projection en résolvant les problèmes aux valeurs propres associés aux deux problèmes (6-7) en l'absence de dissipation, en utilisant la méthode aux différences finies déjà utilisée en section 3. La résolution d'un problème aux valeurs propres dissipatif en déplacement permet d'obtenir les amortissements modaux. La projection sur les modes propres linéaires donne lieu à un système d'équation en temps qui fait apparaître des termes de couplage entre les modes hors-plan et dans le plan. Enfin le problème en temps est résolu par un schéma numérique aux différences finies [17,18].

Transfert d'énergie

Pour évaluer s'il y a un transfert d'énergie d'un domaine basse fréquence vers haute fréquence, la poutre TN est excitée avec un bruit blanc filtré entre 10 et 400 Hz, qui n'excite que cette bande de fréquence. On vérifie bien sur la figure 10(a) qu'à faible niveau, la poutre TN amortie ne répond que sur la bande excitée tandis que de l'énergie fuit sur d'autres bandes de fréquence pour des amplitudes d'excitation plus importantes. L'amplitude hors bande excitée reste encore bien inférieure à l'amplitude dans la bande excitée et il n'est pas clair si ce phénomène d'excitation large bande donne lieu à une réduction des vibrations dans la bande [10-400] Hz. Le même type de résultat est tracé sur la figure 10(b) pour la poutre TN non amortie. On constate cette fois que celle-ci répond de manière non-linéaire même à faible niveau, et qu'à fort niveau d'excitation, les transferts d'énergie sont tels que l'amplitude des pics de résonances est réduite dans la bande excitée. Le comportement est ainsi fortement dépendant de l'amplitude. Ce résultat ouvre clairement des possibilités et il devient envisageable de trouver des configurations avec film amortissant présentant des non-linéarités importantes et où le couplage entre modes permet une réduction du niveau vibratoire en basse fréquence.



(a)



(b)

Fig. 10 : Densités spectrales de puissance de la vitesse vibratoire de (a) la poutre TN avec film amortissant et de (b) la poutre TN sans film pour un effort exciteur d'écart-type σ_F .

Conclusions et perspectives

La caractérisation expérimentale d'une poutre TN peut être effectuée à l'aide de la mesure du coefficient de réflexion de l'extrémité TN ou de la mesure du recouvrement modal de la poutre. Un modèle numérique de la poutre résolu par une méthode aux différences finies permet d'observer l'augmentation des facteurs de pertes modaux à cause de la rigidité complexe et de mettre en évidence l'existence de modes locaux. Un modèle d'extrémité TN imparfaite montre qu'un défaut peut affecter positivement le comportement du TN en diffusant les ondes incidentes sur des modes locaux et en dissipant ainsi l'énergie plus efficacement. On montre enfin que des non-linéarités géométriques peuvent être présentes dans l'extrémité TN, générant alors des couplages entre modes, que l'on peut mettre à profit pour une meilleure dissipation, particulièrement en basse fréquence. Ces études réalisées sur des configurations académiques permettent de mieux anticiper des mises en œuvre de l'effet TN pour réduire les vibrations dans des applications industrielles.

Références bibliographiques

[1] V.V. Krylov and F.J.B.S. Tilman. Acoustic « black holes » for flexural waves as effective vibration dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3-5) :605-619, 2004

[2] V.B. Georgiev, J. Cuenca, F. Gautier, L. Simon, and V.V. Krylov. Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11) :2497-2508, 2011

- [3] M.A. Mironov. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. *Soviet Physics : Acoustics*, 34(3) :318–319, 1988
- [4] V. Denis, A. Pelat, F. Gautier, and B. Elie. Modal overlap factor of a beam with an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :2475–2488, 2014
- [5] D.J. O'Boy, V.V. Krylov, and V. Kralovic. Damping of flexural vibrations in rectangular plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration*, 329(22) :4672–4688, 2010
- [6] E.P. Bowyer, D.J. O'Boy, V.V. Krylov, and J.L. Horner. Effect of geometrical and material imperfections on damping flexural vibrations in plates with attached wedges of power law profile. *Applied Acoustics*, 73(5) :514–523, 2012
- [7] V. Denis, F. Gautier, A. Pelat, and J. Poittevin. Measurement and modelling of the reflection coefficient of an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 349 :67–79, 2015
- [8] B. Elie, F. Gautier, and B. David. Macro parameters describing the mechanical behavior of classical guitars. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(6) :4013–4024, 2012
- [9] K. Ege, X. Boutillon, and B. David. High-resolution modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5) :852–869, September 2009
- [10] A. Leissa. *Vibration of plates*. Acoustical society of America, London, 1993
- [11] D. Ross, E.L. Ungar, and E.M. Kerwin. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. In *Structural damping*, pages 49–57. J.E. Ruzicka, Oxford, Pergamon Press edition, 1960
- [12] V. Denis, A. Pelat, and F. Gautier. Scattering effects induced by imperfections on an acoustic black hole placed at a structural waveguide termination. *Journal of Sound and Vibration*, 362 :56–71, 2015
- [13] T. von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4) :311–385, 1910
- [14] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley New York, 1995
- [15] G.J. Efstathiades. A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using galerkin's procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2) :231–253, 1971
- [16] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :569–590, 2008
- [17] M. Ducceschi and C. Touzé. Modal approach for nonlinear vibrations of damped impact plates : application to sound synthesis of gongs and cymbals. *Journal of Sound and Vibration*, 344 :313–331, 2015
- [18] V. Denis, A. Pelat, F. Gautier, and C. Touzé. Effet des non-linéarités géométriques sur l'amortissement par effet trou noir. In *Congrès Français d'Acoustique 2016*, Le Mans, 11–15 april 2016, 2016